

## Un peu plus de calcul

*Le but de ces séances de calcul est de s'entraîner à calculer bien et efficacement. Et ce, bien sûr, sans calculatrice !*

### Du calcul avec de vrais nombres

#### Exercice 1 — Quantité conjuguée

Simplifier l'expression suivante :  $\frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$ .

#### Exercice 2 — Comparaisons

Classer les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$\frac{7}{4} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{5} ; \frac{1}{24} ; 0,25 ; \frac{10^{-1}}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{7}{12} ; 9 \cdot 10^{-2} ; \frac{3}{2}.$$

### Du calcul avec de vraies lettres

#### Exercice 3 — Simplification de fractions

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Simplifier les expressions suivantes, quand elles sont définies.

$$1. \frac{a}{\frac{1}{a}}$$

$$2. \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}$$

$$3. \frac{4}{2 \times \frac{a}{3}} + \frac{7}{\frac{5}{3a}}$$

$$4. \frac{a}{b} + \frac{a}{-b} - \frac{a}{b} + \frac{-a}{-b} - \frac{-a}{b} - \frac{-a}{-(-b)} + \left(-\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

#### Exercice 4 — Résolutions d'équations

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x$  réelle.

$$1. 3(x + 5) + 2x = -5(3x + 2) - 7$$

$$2. 7x^2 = 4x + 2$$

$$3. \frac{2}{x+1} = -3$$

$$4. \frac{x+3}{x} = 5$$

$$5. x - 4 = x + 7$$

$$6. \frac{x+3}{x} = \frac{5+x}{x+2}$$

$$7. x^2 + ax + b = 0,$$

(a) avec  $a = -3$  et  $b = -4$

(b) avec  $a = 2$  et  $b = 1$

**Exercice 5 — Résolutions d'inéquations**

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue  $x$  réelle.

1.  $(5 - 2x)^2 > (5 - 2x)(x - 2)$

2.  $\frac{x - 2}{x - 1} \leq \frac{x + 3}{x + 2}$

**Du calcul avec de vraies erreurs****Exercice 6 — Où est l'erreur de Charlie ?**

Dans chacun des calculs suivants, Charlie a fait une erreur.

- (a) Sans lire les calculs intermédiaires, expliquer comment se rendre compte rapidement que le résultat final est faux.
- (b) Trouver l'erreur de Charlie et la corriger.

1.

Pour tout réel  $x$  strictement positif

$$\begin{aligned} e^{3 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} &= e^{-3 \ln(x^2)} \\ &= e^{-6 \ln(x)} \\ &= -6e^{\ln(x)} \\ &= -6x. \end{aligned}$$

2.

Pour tout  $a$  réel, on a :

$$\begin{aligned} \frac{4a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{(4+a)(1-a)}{6} &= \frac{8a}{6} - \frac{a}{6} - \frac{4 - 4a + a - a^2}{6} \\ &= \frac{8a - a}{6} - \frac{-a^2 - 3a + 4}{6} \\ &= \frac{7a}{6} - \frac{-a^2 - 3a + 4}{6} \\ &= \frac{7a + a^2 - 3a + 4}{6} \\ &= \frac{a^2 + 4a + 4}{6} \\ &= \frac{(a + 2)^2}{6}. \end{aligned}$$

3.

Pour tout  $x$  réel, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}\cos(2x) = 1 - \sin^2(x) &\iff 2\cos^2(x) - 1 = 1 - \sin^2(x) \\ &\iff 2\cos^2(x) - 1 = 1 - [-\cos^2(x) + 1] \\ &\iff 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) + 2 \\ &\iff \cos^2(x) = 3 \\ &\iff \cos(x) = \sqrt{3} \text{ ou } \cos(x) = -\sqrt{3}.\end{aligned}$$

On la fonction  $\cos$  sur  $[-1; 1]$ , donc l'équation  $\cos(2x) = 1 - \sin^2(x)$ , d'inconnue  $x$  réelle, n'a pas de solution.

4.

Soit  $R$  un réel non nul. Soit  $x$  un réel tel que  $\frac{R}{x} + \frac{8x}{R} \neq 0$ .

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}\frac{R}{x} = \frac{3}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} &\iff \frac{R}{3x} = \frac{1}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} \\ &\iff \frac{3x}{R} = \frac{x}{R} + \frac{R}{8x} \\ &\iff \frac{2x}{R} = \frac{R}{8x} \\ &\iff 16x^2 = R^2 \\ &\iff x^2 = \frac{R^2}{16} \\ &\iff x = -\frac{R}{4} \text{ ou } x = \frac{R}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble de

$$\frac{R}{x} = \frac{3}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} \text{ est } \left\{ -\frac{R}{4}; \frac{R}{4} \right\}.$$

**Exercice 7 — Analyse d'un résultat**

Le but de cet exercice est de vérifier la cohérence d'un résultat.

Six élèves ont fait un exercice de physique et ont obtenu une formule où une durée  $T$  est exprimée en fonction de trois paramètres :

- une vitesse initiale  $v_0$  ;
- une hauteur  $h$  ;
- l'accélération  $g$  de la pesanteur.

L'énoncé donne également le résultat suivant :

$$\text{lorsque la vitesse initiale est nulle, on obtient que } T = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (\star)$$

Parmi les formules suivantes obtenues par les six élèves :

1. lesquelles ne sont pas homogènes ?
2. lesquelles ne satisfont pas la condition  $(\star)$  ?
3. lesquelles peuvent mener à des résultats aberrants ?
4. quelle est la seule qui peut alors être valable ?

(a)

$$T = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

(b)

$$T = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2h}}{\sqrt{g}}$$

(c)

$$T = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

(d)

$$T = \frac{\sqrt{2gh}}{(1 + v_0)g}$$

(e)

$$T = \frac{\sqrt{-v_0^2 + 2gh}}{g}$$

(f)

$$T = \frac{-\frac{v_0}{2} + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{2g}$$